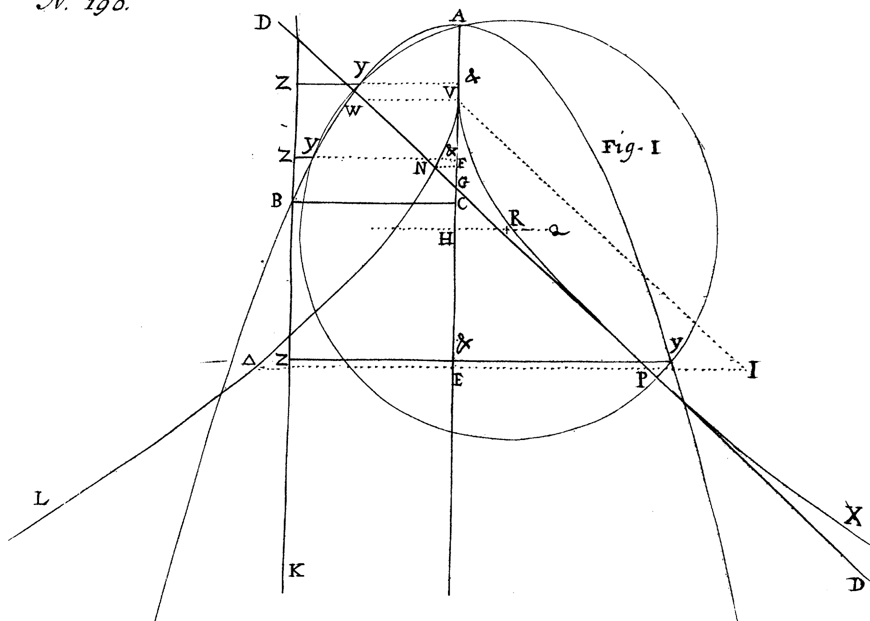
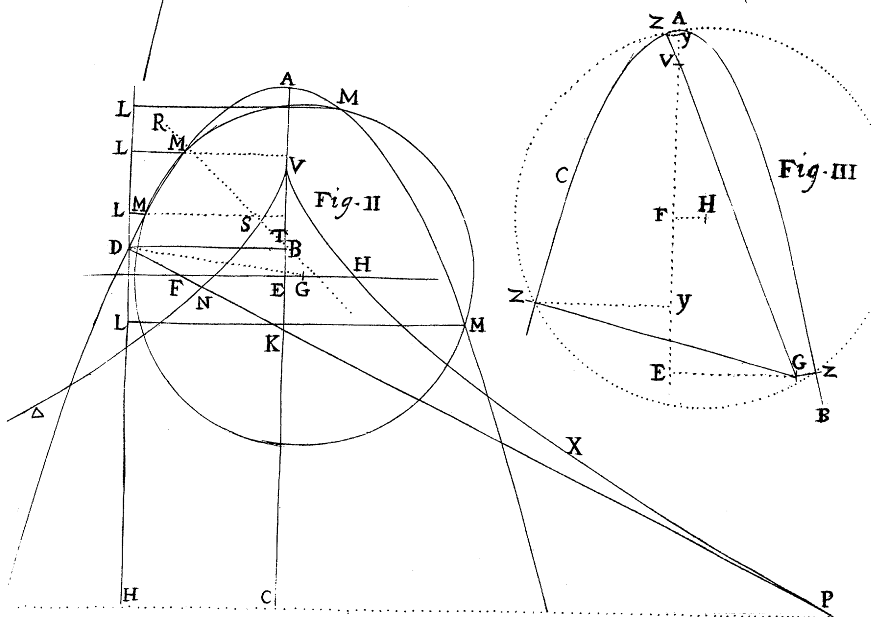
N. 190.


Fig. I
A
D
Z
y
W
V
B
C
N
G
R
H
Z
E
P
I
L
K
X
D


Fig. II
A
M
L
R
V
S
T
B
D
H
F
N
E
G
K
X
H
C
P
Fig. III
Z
A
y
V
C
F
H
E
G
B

De Numero Radicum in Æquationibus Solidis ac Biquadraticis, sive tertiæ ac quartæ potestatis, earumq; limitibus, tractatulus Authore *E. Halley*.

CUM in tractatulo, quem nuper publici juris feci in actis hisce Philosophicis, Num. 188; *Methodum aperuissem, qua Problemata solida utcunq; affecta minimo negotio, unica data Parabola & Circulo, simplicissime construi possint; sub finem mihi sese obtulit contemplatio jucunda satis, nempe ex his Constructionibus Numerum radicum in quavis Æquatione, earumq; Limites ac signa facile consequi ac determinari: quocirca fidem dedi me brevi de hac materia dissertatiunculam aliquam scripturum, in qua si non Principibus, saltem secundæ classis Geometris, me non ingratum nec inutile præstiturum omnino persuasum habui.*

Propius vero inspicienti mihi compertum est, me imprudentem inter ardua Geometrica illapsum, ac jam iis tractandis designatum, quibus olim laboravere Viri illustres Harriottus *nostras, ac* Cartesius; *in quibus pari fato utriq; Paralogismum, (forsan in eorum scriptis Geometricis unicum) diverso tamen modo, admisere; uti posthac probabitur: sed* Quandoq; bonus dormitat. *Qua propter agnita rei tum difficultate tum præstantia, totis viribus incumbere statui, ne promissis exequendis impar crederer, ac ne Geometriæ pars tam eximia, tamq; parum culta, diutius tenebris involuta lateret; sed ope nostra lucide his paucis exposita daretur.*

Imprimis vero Lectorem monitum velim, quod dum his legendis operam dat, oportet prædictam dissertationem Num. 188. *editam, ad manum habere, ac Constructiones ibidem traditas probe callere; quia quæ sequuntur ab illis maxima ex parte pendent, quas tamen hic repetere vix integrum esset.*

Ex Cartesio *& ex ibi dictis constat, tam in Cubicis quam in Biquadraticis æquationibus, radices exponi posse demittendo perpendicula in Axem, datamve diametrum Parabolæ datæ, ab intersectionibus Curvæ illius cum Circulo. Cumq; Circulus Parabolam secans, vel in quatuor vel duobus punctis eam intersecare necesse est, constat in Biquadraticis vel duas vel quatuor radices veras, Affirmativas vel Negativas, semper haberi; uti etiam si forte Circulus illam tangat, quo in casu æqualitas duarum radicum ejusdem signi concluditur. In Cubicis autem, quoniam una ex intersectionibus ad Constructionem requiritur, non nisi una vel tres reliquæ radices designant unam vel tres; uti in Casu contactus, unde constat duas æquales reperiri Radicis, Problemaq; unde resultat æquatio revera planum esse.*

Cubicæ itaq; omnes quomodocunq; affectæ una vel triplici radice explicabiles sunt, utiq; semper possibiles, nempe si radices Negativas pro veris admiseris: sic Biquadraticæ, quarum terminus ultimus r *signo — affecta est, duabus vel quatuor. Ast si habeatur* + r *in æquatione, eaq; tanta sit, ut* $\sqrt{GDq - ar}$, *(vide* fig. pag. 341.) *minor sit quam ut Circulus, eo Radio ac centro* G *descriptus, Parabolam contingere in aliquo puncto possit, æquatio data omnino impossibilis est, nec ulla Radice Negativa vel Affirmativa explicabilis: Sed de his plura in sequentibus.*

Quoniam vero tanta intercedit differentia inter casus Cubicarum & Biquadraticarum, ut simul comprehendi nequeant; primum Cubicas deinde alteras tractabimus. Cubicæ vero infinitis Circulis in data Parabola construuntur, Biquadraticæ autem unico tantum (saltem his methodis): id adeo quia ponendo z—e *sive indeterminata aliqua, æqualem nihilo, æquatio Cubica reducitur ad Biquadraticam easdem radices cum Cubica habentem, atq; insuper aliam ipsi* e *æqualem; unde fit ut tot Circulis diversis construi possit Cubica, quot imaginari velis quantitates* e, *id est infinitis. Inter has vero Constructiones illa, quam dedi* (pag. 342.) *longe facillima est. Huic tamen non multum cedit alia, quæ ad enucleationem Numeri Radicum, earumq; limitum*

tum magis accommodata videtur, quæq; ortum trahit ex ablatione ſecundi termini, ponendo modo vulgari x = z + *vel — tertia parte Coefficientis termini ſecundi. Hæc autem eſt. Data Parabola* A B Y (*Fig.* I.) *ejuſq; Vertice* A, *axe* A E *&* *Latere recto* a, *reducatur æquatio ad formam conſuetam,* viz. z^3. b z^2. a p z. a a q. = o. *Deinde ad diſtantiam* $\frac{1}{3}$b *ducatur Axi parallela* B K, *dextrorſum quidem ſi fuerit* + b, *aliter ſiniſtrorſum, Parabolæ occurrens in* B; *ac lineæ ſuppoſitæ* A B *erigatur perpendicularis utrinque interminata* D P, *axi occurrens in puncto* G. *De* B *in Axem demitte perpendiculum* B C, *& ipſi* A C *fiat* G E *ſemper æqualis, ac verſus inferiora ponatur. Ab* E *fiat* E H = $\frac{1}{2}$ p, *ſurſum quidem, ſi in æquatione fuerit* + p, *deorſum vero ſi* — p, *ac e puncto* H (*vel ex* E *ſi defuerit quantitas* p) *educatur perpendiculum* H Q *interminatæ* D P *occurrens in puncto* O. *Denique in lineæ* H Q *interminata, fiat* O R = $\frac{1}{2}$ q, *ab* O *dextrorſum ſi fuerit* — q, *ſiniſtroſum ſi* + q, *collocanda: ac Circulus centro* R, *radio* R A *deſcriptus, tot punctis ſecabit Parabolam, quot æquatio propoſita veras habet radices; eæq; erunt perpendicula* Z Y *a punctis interſectionum* Y *in axi parallelam* B K *demiſſa; quarum quæ ad dextram lineæ* B K *Affirmativæ ſunt, ad ſiniſtram Negativæ.*

Hujus Conſtructionis commoditas in eo conſiſtit, quod circulo per Verticem tranſeunte peragitur, perinde ac ſi defuiſſet ſecundus Terminus; ideoq; ad Radicum Numerum determinandum, ſufficit Loci ſive Lineæ Curvæ proprietates perſpectas habere, quæ ſpatia diſcriminat, ubi ſi ponatur centrum Circuli qui per Parabolæ Verticem tranſeat, circumferentia ejus vel uno vel tribus aliis punctis eam ſecabit; hoc eſt Lineæ curvæ, in quam incidunt centra omnium Circulorum per verticem tranſeuntium ac deinde Parabolam tangentium, naturam definire.

Locus autem ille eſt Parabolois, quam cum Cl. Walliſio *ſemicubicalem appellare licet, ſive in qua Cubi applicatorum ad Axem ſunt inter ſe ut Quadrata portionum Axis. Cujus Latus rectum eſt* $\frac{27}{8}$ *Lateris recti datæ Parabolæ, Vertex vero punctum* V (Fig. I.) *exiſtente* A V *dimidium lateris recti ejuſdem Parabolæ. Hoc eſt, ſi ponatur Unitas pro latere recto datæ Parabolæ,*

bolæ,

bolæ, $\frac{8}{27}$ *cubi ordinatim applicatæ æquabuntur quadrato partis diametri, ſive cubus ex* $\frac{2}{3}$ V H *quadrato ex* H R, *ſi ſcil.* R *ſit centrum circuli qui per verticem Parabolæ tranſeat eamq; deinde contingat; Hæc eſt Curva illa quam primus mortalium* Nelius *Noſtras rectæ datæ æqualem demonſtravit, eaq; occaſione apud Principes Geometras dudum celebris; ejuſq; proprietates* Cl. Walliſius *ſub finem Libri de Ciſſoide, &* Hugenius prop. 8 & 9 de linearum Curvarum evolutione, *aliiq; acri ingenio diſquiſivere, Quorum ſcripta conſulat Lector. Hæc Curva utrinq; ab Axe Parabolæ deſcripta,* viz. V N L, V P X, *ſpatium complectitur, in quo ſi ponatur centrum Circuli, qui per verticem* A *tranſeat, interſecabit ille Parabolam in tribus aliis punctis; Spatia vero ab Axe remotiora centra præbent circulis non niſi uno præter verticem puncto Parabolam ſecantibus.*

His probe intellectis jam ad determinandum Radicum numerum accingimur: Ac primum deficiat ſecundus terminus; ſitque Latus rectum 1, *vel* A V $= \frac{1}{2}$; *In conſtructione* V H *eſt* $\frac{1}{2}$ p, H R *vero* $\frac{1}{2}$ q; *cumq; ſi fuerit* + p, *ab* V *verſus ſuperiora ponendo ſit* $\frac{1}{2}$ p, *centrum circuli extra ſpatium* L V X *ſemper conſtituitur; ideoq; una tantum radice explicabilis eſt, affirmativa ſi* — q, *negativa ſi* + q: *quæ quidem radices* Cardani *Regulis inveſtigantur. Si vero fuerit* — p, V H $= \frac{1}{2}$ p *inferne ponitur, ac fieri poteſt ut* H R *cadat inter Axem & Curvam* V X *vel* V L, *ſi ſcilicet Cubus ex* $\frac{2}{3}$ V H, *ſive ex* $\frac{1}{3}$ p, *major ſit quam quadratum ex* $\frac{1}{2}$ q, *ſive* $\frac{1}{27}$ p p p *major quam* $\frac{1}{4}$ q q, *quo in caſu tres dantur radices, duæ Negativæ, ſi fuerit* — q, *ac una Affirmativa earum ſummæ æqualis; vel ſi* + q, *duæ Affirmativæ unaq; Negativa. Quod ſi* $\frac{1}{27}$ p p p *minor ſit quam* $\frac{1}{4}$ q q, *una tantum reperitur Radix, Affirmativa ſi* — q, *negativa ſi* + q. *Atq; hæc paſſim docentur ab iis qui hanc Geometriæ partem tractarunt.*

Jam adſint omnes termini, ac primum proponatur, Exempli cauſa, æquatio hæc $z^3 - z^2 b + z p - q = 0$; *cui etiam Figuram* I. *adaptavimus. In hujus conſtructione* B C $= \frac{1}{3}$b, V G $= \frac{1}{2}$ A C $= \frac{1}{18}$bb, V E [illegible] bb, V H $\frac{1}{6}$bb — $\frac{1}{2}$p, G H $\frac{1}{9}$bb — $\frac{1}{2}$p *vel* $\frac{1}{2}$p — $\frac{1}{9}$bb, *hinc* H O $= \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}$b p *vel* $\frac{1}{6}$b p $- \frac{1}{27}b^3$, *atq;* H R *ſive diſtan-*

tia

tia Centri circuli R *ab Axe, est semper differentia inter* $\frac{1}{6}bp$ *&* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$; *quæ si æquantur, centrum cadit in Axe; si* $\frac{1}{6}bp$ *major sit quam* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ *ad sinistram Axis, sin minor ad dextram. Si itaq; Cubi ex* $\frac{1}{3}$VH, (*hoc est ex* $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$ *quam nominemus* d) *Latus quadratum sive* $\sqrt{ddd}$, *majus sit quam* HR, *sive differentia inter* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ & $\frac{1}{6}bp$; *reperitur centrum* R *intra spatium* N P V, *Paraboloidibus* V P X, V N L *ac recta interminata* D N P *circumscriptum: ac proinde circulus Parabolam secabit in tribus punctis* Y, Y, Y, *ad dextram lineæ* B K *sitis, atq; adeo æquatio tres habet radices Affirmativas. Centro vero extra hoc spatium* N V P *constituto, non nisi una radice Affirmativa explicari potest. Hic obiter notandum rectam* D P *Paraboloidem* V P X *tangere in puncto* P, *existente* E P $\frac{1}{27}b^3$; *alteram vero* V N L *secare in puncto* N, *ita ut demisso in axem Perpendiculo* N F, V F *sit pars quarta ipsius* E V *sive* $\frac{1}{24}bb$, N F *vero* $\frac{1}{108}b^3$. V W *autem, quæ e puncto* V *axi perpendiculariter erecta lineæ* D P *occurrit in* W, *æqualis est* $\frac{1}{54}bbb$ *sive* $\frac{1}{2}$E P.

Hinc tuto concluditur si in æquatione vel p *major sit quam* $\frac{1}{3}bb$, *vel* q *major quam* $\frac{4}{27}b^3$, *non nisi unam eamq; affirmativam radicem reperiri; Fallit itaq; Regula* Cartesii (*Edit.* Amst. 1659 *pag.* 70) *ubi tot veras dari radices quot sunt in æquatione mutationes signorum* + *&* — *pronunciat, frustra etiam in Commentariis suis Sphalma hoc excusante* Schootenio; *Fingi enim possunt infinite plures æquationes præcedentis formulæ tres signorum mutationes habentis, quæ unam tantum quam quæ tres habeant radices. Propositio etiam quinta Sectionis quintæ Artis Analyticæ* Harriotti *Nostri, uti* Prob. 18 *Numerosæ Potest. Resol.* Vietæ, *vix satis firma est, cum ex limitationibus quas ibi posuerunt, toti parallelogrammo* P I V W *id conveniat, quod soli spatio* N V P *jam competere probavimus, hoc est ut centrum præbeat circulo tribus aliis punctis præter verticem Parabolam secante.*

Quantitas autem q, *sive terminus ult., datis* b *&* p, *ea lege ut* p *minor sit quam* $\frac{1}{3}bb$, *accurate limitatur ex præcedente æquatione* $\sqrt{ddd} = \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q \backsim \frac{1}{6}bp$; *cum scil. Circulus Parabo-*

lam contingat. Itaq; $\frac{1}{2}q$ *minor esse debet quam* $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 + \sqrt{ddd}$; *at si* p *major fuerit quam* $\frac{1}{4}bb$, *majorem etiam esse oportet* $\frac{1}{2}q$ *quam* $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 - \sqrt{d^3}$ *ne cadat centrum in spatiolo* N V W: *Atq; his conditionibus æquatio semper triplici radice explicabilis erit, aliter non nisi una. Semper vero, sive tres sive una, Affirmativæ sunt, ob positionem centri* R *ad dextram lineæ* D P.

Atq; hic est casus maxime difficilis, ita ut quicunq; præmissa bene calleat sequentia facili negotio intelliget. Detur jam æquatio $z^3 - bz^2 + pz + q = 0$. *Hic ut tres habeantur radices, oportet centrum circuli alicubi intra spatium* P N Δ, *rectis* P N, P Δ *&* *curva Paraboloidis* N Δ *definitum, reperiri; quapropter cum* E F *sit* $= \frac{1}{3}bb$, p *minor esse debet quam* $\frac{1}{4}bb$; *jam ad determinationem quantitatis* q, *existente* $d = \frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$ *ut antea,* $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$ *semper major esse debet quam* $\frac{1}{2}q$, *ut constituatur centrum circuli in spatio prædicto* P N Δ: *quod cum sit æquatio talis duas habet radices Affirmativas ac unam negativam. Si vero* p *major est quam* $\frac{1}{4}bb$, *uel* $\frac{1}{2}q$ *major quam* $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, *non nisi una eaq; negativa radice explicabilis est.*

Proponatur jam æquatio $z^3 - bz^2 - pz - q = 0$. *Ut hæc æquatio tres habeat Radices, oportet centrum circuli alicubi inveniri in spatio indefinito, inter rectam* D P D *&* *curvam Paraboloidis* P X; *hic quantitas* p *non est obnoxia limitationibus,* $\frac{1}{2}q$ *vero semper minor esse debet quam* $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, *posito* $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$: *Hoc pacto duæ dantur Radices Negativæ, ac una Affirmativa; aliter vero si* $\frac{1}{2}q$ *major sit quam* $\sqrt{ddd} - \frac{1}{27}bbb - \frac{1}{6}bp$, *unica tantum Affirmativa exponi potest. Quarto loco sit æquatio* $z^3 - bz^2 - pz + q = 0$, *quæ duas Affirmativas habet Radices ac unam Negativam si centrum circuli reperiatur in spatio indefinito inter rectas* P Δ, P D *ac curvam Paraboloidis* Δ L; *hoc est, (posito* $d = \frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$,) *si* $\frac{1}{2}q$ *minor sit quam* $\sqrt{ddd} + \frac{1}{27}bbb + \frac{1}{6}bp$; *si vero* $\frac{1}{2}q$ *major hac quantitate fuerit, una tantum Negativa inest radix.*

Quatuor autem æquationes reliquæ, in quibus habetur $+b$, *quoad limitationem Numeri Radicum non differunt a prædictis, si signum*

num termini ultimi mutetur, ſervato ſigno termini tertii; quæ vero Affirmativæ erant radices in illis hic fiunt Negativæ; & vice verſa. Sic in æquatione $z^3 - bz^2 + pz^2 - q = o$. *Una vel tres erant Affirmativæ Radices; in hac vero* $z^3 + bz^2 + pz + q = o$ *vel una uel tres Negativæ ſunt, ſub iiſdem conditionibus; nulla vero omnino Affirmativa. Sic in* $z^3 + bz^2 + pz - q = o$, *duæ ſunt Negativæ & una Affirmativa, ſi* p *minor ſit quam* $\frac{1}{3}bb$, *ac* $\frac{1}{2}q$ *minor quam* $\sqrt{d^3 + \frac{1}{27}b^3 - \frac{1}{6}bp}$, *quemadmodum in* $z^3 - bz^2 + pz + q = o$ *duæ erant Affirmativæ & una Negativa; excedentibus autem leges præſcriptas* p *vel* q, *una tantum hic eſt radix Affirmativa, quæ ibi Negativa erat. Pari modo in* $z^3 + bz^2 - pz + q = o$ *vel duæ ſunt Affirm. ac una Neg. vel una Negativa tantum. Deniq; iiſdem de cauſis in æquatione* $z^3 + bz^2 - pz - q$ *duæ ſunt Negativæ & una Affirm. vel una Affirm. tantum, quibus in æquatione* $z^3 - bz^2 - pz + q$ *duæ erant Affirm. & una Negativa, vel una Negativa tantum, nempe prout* $\frac{1}{2}q$ *major vel minor fuerit quam* $\sqrt{d^3 + \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp}$.

Si deſuerit terminus tertius, ſive p z, *centrum* R *ſemper cadit in linea* I P E Δ, *quocirca ſi fuerit* $z^3 - bz^2$. *. $- q$ *vel* $z^3 + bz^2$. *. $+ q$, *una tantum eſſe poteſt radix, ſi* $- b$ *Affirmativa, ſi* $+ b$ *Negativa. At ſi fuerit* $z^3 - bz^2$. *. $+ q$ *vel* $z^3 + bz^2$. *. $- q$, *duæ poſſunt eſſe Affirmativæ ac una Negativa in priore, vel una Affirm. & duæ Neg. in poſteriori, cadente centro in linea* P Δ *inter* P *ac* Δ, *hoc eſt ſi* $\frac{1}{4}q$ *minor ſit quam* $\frac{1}{27}b^3$; *ſin major fuerit, una tantum Negativa in priore, vel una Affirm. in poſteriore dari poteſt.*

Hactenus numerum radicum in Cubicis æquationibus plenius aſſecuti ſumus, reſtat ut nonnulla adjiciam de quantitate radicum. Hic primum notandum quod omnis æquatio tres habens radices ope Tabulæ Sinuum, Triſectione ſcilicet anguli, ſatis expedite reſolvi poſſit; ponendo ſcil. $\sqrt{\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p}$ *vel* $\sqrt{4d}$, *ſi fuerit* $+ p$ *in æquatione, vel* $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{3}p}$, *ſi* $- p$, *pro Radio Circuli; Angulum vero triſecandum qui Sinum habeat in Tabula Sinuum* $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q:}{\sqrt{ddd}}$ *Invento hoc angulo, Sinus*

tertiæ partis ejus, ut & Sinus tertiæ partis compl. ad Semicirculum, eorumq; ſumma, ex Tabula Sinuum dabuntur. Hi vero Sinus in Radium $\sqrt{\frac{1}{3}bb + p}$ *ducendi ſunt, & habebuntur quantitates* (y &, y &, y &, *in Fig.*) *quarum &* $\frac{1}{3}b$ *vel ſumma vel differentia, prout caſus poſtulat, veras radices Æquationis exhibebunt. Hæc omnia ex inventis* Carteſii *derivantur: Ut vero caſus omnes quantum fieri poſſit breviter complectar, dico quod centro* R, *in prima æquationum formula, cadente in ſpatio* V G P, *ſectiones duæ* Y, Y, *cadunt inter* A & B, *ac proinde utraq; ex minoribus radicibus minor eſt quam* $\frac{1}{3}b$, *tertia autem & major ſemper ſuperat* $\frac{1}{3}b$, *ſuperatur vero a* b. *Quod ſi cadat in ſpatio* G N V, *duæ majores ſunt quam* $\frac{1}{3}b$, *minores vero quam* $\frac{2}{3}b$, *tertia vero eſt* b — *duabus alteris. ac proinde minor quam* $\frac{1}{3}b$: *ſed adbibita limitatione quantitatis* p, *arctioribus terminis radicis includuntur. Maxima enim radix minor eſt quam* $\sqrt{\frac{4}{9}bb - \frac{4}{3}p} + \frac{1}{3}b$, *major vero quam* $\sqrt{\frac{1}{9}bb - p}$ $+ \frac{1}{3}b$; *at cum* $\frac{1}{9}b.b$ *minor eſt quam* p, *limes ille fit* $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p}$ $+ \frac{1}{3}b$. *Radix media ſemper minor eſt quam* $\sqrt{\frac{1}{4}bb - p} + \frac{1}{2}b$; *major vero quam* $\frac{1}{3}b - \sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p}$; *hunc vero limitem nunquam excedit radix minima, ſed cum quantitate* q *evaneſcit.*

In ſecunda formula præſcriptis legibus duæ ſunt affirmativæ ac una negativa, ac cadente centro in ſpatio G P E *altera ex affirmativis major eſt, altera minor quam* $\frac{1}{3}b$, *major vero non excedit* b, *Negativa autem major non eſſe poteſt quam* $\sqrt{\frac{1}{3}bb} - \frac{1}{3}b$, *eſt autem differentia ipſius* b *& ſummæ Affirmativarum. Centro autem in ſpatio* E N G △ *poſito, utraq; Affirmativa major eſt quam* $\frac{1}{3}b$, *minor vero quam* $\sqrt{\frac{1}{2}bb} + \frac{1}{3}b$, *Negativa vero ſemper minor eſt quam* $\frac{1}{3}b$. *Limites autem propriores ex data* p *evadunt, radicis quidem maximæ Affirmativæ* $\sqrt{\frac{1}{4}bb - p} + \frac{1}{2}b$, *qua ſemper minor eſt, ut & major quam* $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p} + \frac{1}{3}b$; *hoc tamen limite minor eſt altera Affirmativa, quæ cum quantitate* q *minuitur. Negativa vero ſemper minor eſt quam* $\sqrt{\frac{1}{3}bb - \frac{1}{3}p} - \frac{1}{3}b$, *ac deficiente quantitate* q *evaneſcit.*

In tertia formula duæ Negat. ſunt ac una Affirmativa: in hac,

ut &

ut & in quarta, Radices non limitantur a quantitate b. *Affirmativa vero semper minor est quam* $\sqrt{\frac{4}{9}bb+\frac{4}{3}p}+\frac{1}{3}b$, *major tamen quam* $\sqrt{p+\frac{1}{4}bb}+\frac{1}{2}b$: *maxima vero ex Negativis semper major est quam* $\sqrt{\frac{1}{9}bb+\frac{1}{3}p}-\frac{1}{3}b$, *minor vero quam* $\sqrt{p+\frac{1}{4}bb}-\frac{1}{2}b$. *Minor autem ex Negativis semper minuitur cum minuta quantitate* q.

In quarta formula, cadente centro intra spatium L△PD; *si duæ sint Affirmativæ ac una Negativa, maxima ex Affirmativis major esse nequit quam* $\sqrt{p+\frac{1}{4}bb}+\frac{1}{2}b$, *nec minor quam* $\sqrt{\frac{1}{9}bb+\frac{1}{3}p}+\frac{1}{3}b$; *minor vero radix ab hoc limite minuitur, minuta quantitate* q. *Negativa autem minor est quam* $\sqrt{\frac{4}{9}bb+\frac{4}{3}p}-\frac{1}{3}b$; *major vero quam* $\sqrt{p+\frac{1}{4}bb}-\frac{1}{2}b$.

Notandum vero hic radices Negativas ubiq; signo Affirmativo notari, quia hæ sunt radices Affirmativæ quatuor æquationum illarum, in quibus habitur + b, *ac* q *signo contrario notatur; ut supra monui. Horum omnium demonstratio ex eo consequitur, quod ubicunq; centrum circuli* R *incidit in Lineas Curvas* VPX *vel* V△L, *circumferentia ejus Parabolam tangit in puncto, cujus distantia ab axe est* $\sqrt{\frac{1}{3}VH}$, *eamq; secat ex altera Axis parte, ad distantiam* $2\sqrt{\frac{1}{3}VH}$; *cum vero centrum cadit in lineam* DPD, *altera ex radicibus fit* $=0$, *ac proinde Cubica reducitur ad Quadraticam, sive ad* $z^2-bz+p=0$ *cujus radices limites designant ubi evanescit quantitas* q: *ac quo minor est* q, *eo propius ad has limites accedunt radices. Quadratica est etiam cum centrum cadit in Axe; hoc est, cum* $\frac{1}{2}q=\frac{1}{6}bp-\frac{1}{27}b^3$ *in prima formula; vel* $\frac{1}{2}q=\frac{1}{27}bbb-\frac{1}{6}bp$ *in secunda; in tertia impossibile est; at in quarta cum* $\frac{1}{2}q=\frac{1}{27}bbb+\frac{1}{6}bp$; *quo in casu minor ex Radicibus Affirmativis est* $\frac{1}{3}b$, *major* $\sqrt{\frac{1}{3}bb+p}+\frac{1}{3}b$; *Negativa vero* $\sqrt{\frac{1}{3}bb+p}-\frac{1}{3}b$. *In prima, Radices sunt* $\frac{1}{3}b$ & $\frac{1}{3}b\pm\sqrt{\frac{1}{3}bb-p}$. *In secunda vero formula,* $\frac{1}{3}b$ & $\sqrt{\frac{1}{3}bb-p}+\frac{1}{3}b$ *sunt Affirmativæ: Negativa autem* $\sqrt{\frac{1}{3}bb-p}-\frac{1}{3}b$.

Atq; hæc in Cubicis sufficere posse videntur; ob eximium vero Usum Methodi, qua ope Tabulæ Sinuum radices harum æquationum

onum inveniuntur, placuit unum vel alterum exemplum adjungere, ut praxis illius compendium inde innotescat. Proponatur Æquatio $zzz - 39zz + 479z - 1881 = 0$; *quæruntur radices* z. $\sqrt{\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p} = \sqrt{9\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, *cujus duplum* $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ *radius est Circuli*; & $\frac{\frac{1}{27}bbb + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp}{\sqrt{ddd}} = \frac{2197 + 940\frac{1}{2} - 3113\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$, *sive* $\frac{24}{9\frac{1}{3}\sqrt{9\frac{1}{3}}}$ *est sinus Tabularis Anguli, hoc, est, facta divisione ope Logarithmorum, Log.* 9.9251560, *cui respondet, Angulus* 57gr. 19m. 11s. ½. *Hujus tertia pars* 19g. 6m. 24s. & *complementi* 40g. 53m. 36s. *Sinus dant Log.* 9.514983. & 9.816011, *qui ducti in Rad.* $\sqrt{37\frac{1}{3}}$ *producunt* Y &, & Y & *Log.* $0.301030 = 2$ & *Log.* $0.601059 = 4$, *tertia vero* Y & *æqualis est eorum summæ sive* 6. *Ideoq; radices sunt* $13 - 4 = 9$. $13 - 2 = 11$ & $13 + 6 = 19$, *ex quibus singulis conflatur prædicta æquatio. Ubi Notandum duas minores radices non excedere* $\frac{1}{3}b$ *vel* 13, *quia centrum* R *in constructione cadit ad dextram Axis; id est* $\frac{1}{6}bp$ *minor est quam* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$.

Exemplum alterum sit $x^3 - 15x^2 - 229x - 525 = 0$. & *quærantur radices.* $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p} = \sqrt{101\frac{1}{3}} = \sqrt{d}$, & *Radius Circuli* $\sqrt{405\frac{1}{3}}$. $\frac{\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q}{\sqrt{ddd}} = \frac{125 + 572\frac{1}{2} + 262\frac{1}{2}}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}} = \frac{960}{101\frac{1}{3}\sqrt{101\frac{1}{3}}} =$ *Sinui Tabulari Arcus, cujus Log.* 9.9736426, & *Arcus ipse* 70gr. 14m. 22s. *hujus pars tertia est* 23gr. 24m. 47½s. & *complementi* 36. 35. 12½; *quorum Sinus Log. sunt* 9.599183 & 9.775275, *quibus addito Log.* $\sqrt{405\frac{1}{3}}$ *fiunt Log.* $0.903089 = 8$ & *Log.* $1.079181 = 12$, & *eorum summa* $= 20$. *Hinc concluditur* $20 + \frac{1}{3}b$ *vel* 25 *æquari radici Affirmativæ,* & 8 & $12 - \frac{1}{3}b$ *sive* 3 & 7 *Negativis. Quod si æquatio fuisset* $x^3 + 15x^2 - 229x + 525 = 0$, 3 & 7 *fuissent Affirmativæ*; 25 *vero Negativa. Cæteræ autem Cubicæ unica tantum Radice explicabiles juxta Regulas* Cardani *resolvendæ sunt, postquam demptus fuerit secundus terminus; nec video quo pacto minori calculo hoc negotium peragi possit. At si desideretur radix hæc in Quantitatibus* b, p, q *expressa, dico*

eam esse in prima formula, $\frac{1}{3}b$ + *vel* — *summa vel differentia Radicum Cubicarum ex* $\sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{108}p^2b^2 + \frac{1}{27}b^3q - \frac{1}{6}bpq + \frac{1}{27}p^3} \pm \frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{6}bp$: *viz.* +, *si* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$ *major sit quam* $\frac{1}{6}bp$, *aliter* —; *Summa vero quoties* $\frac{1}{3}bb$ *major est quam* p; *sin minor fuerit* $\frac{1}{3}bb$, *differentia. Inq; cæteris formulis radix semper conflatur ex iisdem elementis, variatis tamen signis* + *&* —, *ut facile percipiet qui velit experiri.*

Ope vero Tabulæ Logarithmicæ Sinuum Versorum Radices hæ satis prompte inveniuntur; nempe si Coefficientes Numeri sint Surdi vel fracti, ac radices Numeris ineffabiles; ut plerumq; fit. Hæc autem est Regula: In prima ac secunda formula, si $\frac{1}{3}bb$ *minor sit quam* p; *sit* $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb = d$, *& posita differentia inter* $\frac{1}{6}bp$ *&* $\frac{1}{27}b^3 + \frac{1}{2}q$, *hoc est* HR, *in prima, ac inter* $\frac{1}{6}bp + \frac{1}{2}q$ *&* $\frac{1}{27}b^3$, *in secunda, pro Radio; inveniatur angulus cujus Tangens est* $d\sqrt{d}$. *Deinde ut Co-sinus hujus anguli, ad ejusdem Sinum versum: ita differentia pro Radio habita, ad quartum; cujus Latus cubicum trisecando Logarithmum habebitur: ac diviso* $\frac{1}{3}p - \frac{1}{9}bb$ *per hoc Latus Cub. e Quoto subducatur Divisor: Residuum erit quantitas* Y &, *in Fig.* I. *Hujus Residui ac* $\frac{1}{3}b$ *summa, si centrum cadit ad dextram Axis, aliter differentia earundem, Radix erit quæsita. Quod si* $\frac{1}{3}bb$ *major sit quam* p, *posito* HR *pro Radio, sit* $d\sqrt{d}$ *sive distantia Paraboloidis ab Axe, Sinus Arcus cujusdam; Hujus Sinus versus ducatur in Radium, sive* $\frac{1}{6}bp - \frac{1}{27}b^3 \pm \frac{1}{2}q$, *ac trisecto producti Logarithmo, habebitur ejus Latus Cubicum, per quod dividatur* $\frac{1}{9}bb - \frac{1}{3}p$. *dico Quoti ac divisoris summam eadem Lege additam vel ablatam ex* $\frac{1}{3}b$, *Radicem quæsitam exhibere. Ac par est ratio in tertia ac quarta formulis, nisi quod* $\frac{1}{27}bbb + \frac{1}{6}bp \pm \frac{1}{2}q$ *pro Radio assumenda est, ac* $\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p$ *in* $\sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{1}{3}p}$ *sive* $d\sqrt{d}$ *pro Sinu: Sed hæc præcepta exemplis fortasse melius percipientur.*

Sit æquatio Cubica $zzz - 17zz + 54z - 350$, *ac quæratur Radix* z: *Hic* $\frac{1}{3}bb$ *major est quam* p, *sed* q *major est quam Cubus ex* $\frac{1}{3}b$, *ideoq; una tantum Affirmativa Radice explicabilis est. Jam* $\frac{289}{9} - \frac{54}{3}$ *est* d, *ac* $\frac{127}{9}\sqrt{\frac{127}{9}}$ *pro Sinu habenda est, ad Radium* $\frac{4913}{27} + 175 - 153$, *hoc est* $\frac{5507}{27}$:

Arcus vero competens fit 15gr. 3m. 49s. *Hujus Sinus Verſi Log.* 8.5362376. *additus Log. Radii* 2.3095913. *dat.* 0.8457889. *cujus tertia pars* 0.2819276. *eſt Log. Radicis Cubicæ* 1.91394, *quo diviſore diviſo* $\frac{127}{9}$ *ſive* d, *fit Quotus* 7.37281; *Quoti ac diviſoris ſumma, aucta additione* $\frac{1}{3}$b, *fit Radix quæſita, nempe* 14.9534, &c.

Exactis Cubicis Biquadraticas jam aggrediamur; Hæ ſemper vel nullam, vel duas, vel quatuor Radices veras habent, quarum determinatio partim a Coefficientibus, partim a ſigno & magnitudine numeri abſoluti dati, pendet; Harum omnium Conſtructionem generalem (in N°. 188. Pag. 341) *ſatis concinnam prodidi, quam Lector jam vidiſſe ſupponitur; Figuram tamen eo ſpectantem* (Fig. II.) *huc transferre viſum eſt. In Conſtructione æquationis* $z^4 - bz^3 + pzz - qz + r = 0$, *fit* $BD = \frac{1}{4}b$, $AB = \frac{1}{16}bb$, $BK = \frac{1}{2}$, *ſive dimidio Lateris recti,* $KC = 2\,AB = \frac{1}{8}bb$. $KE = \frac{1}{8}bb - \frac{1}{2}p$, $AE - \frac{1}{2} = \frac{3}{16}bb - \frac{1}{2}p$ $FE = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp$, *ac* $EG = \frac{1}{16}b^3 - \frac{1}{4}bp + \frac{1}{2}q$; *quo facto Circulus centro* G, *Radio* $\sqrt{GD^2 - r}$, *interſecabit Parabolam vel nullo, duobus aut quatuor punctis, quæ perpendiculis in lineam* DH, *Radices omnes* z *exhibent. Ut autem quatuor ſint, evidens eſt centrum circuli alicubi conſtitui debere intra ſpatium, de cujus puncto quovis tria perpendicula in Curvam Parabolæ demitti poſſint; atq; ſimul radium minorem eſſe maximo ex illis perpendicularibus, majorem vero medio. Quod ſi centrum conſtituatur extra hoc ſpatium, ut non niſi una perpendicularis in Parabolam demitti poſſit, qua major ſit radius; vel ſi minor ſit media ex tribus perpend. major vero quam minima ex illis, duæ tantum poſſunt eſſe radices; nulla vero omnino datur, quoties radius* $\sqrt{GD^2 - r}$ *minor eſt minima ex tribus, vel una illa, quoties una tantum eſt.*

Jam quale ſpatium hoc ſit, quibuſq; limitibus diſcernitur, ac quibus conditionibus radius Circuli minor vel major ſit prædictis perpendicularibus, nobis reſtat inquirendum; ac primum quo pacto perpendicularis in Parabolam demitti poſſit oſtendendum eſt.

Sit ABC *Parabola*, AE *Axis ejus*, AV (Fig. III.) *semi-Latus rectum*, G *punctum de quo demittenda est perpendicularis: Ducatur Axi perpend.* GE, *ac bisecetur* VE *in* F, *&* *erecta perpend.* FH *ad idem Axis Latus, fiat* FH $= \frac{1}{4}$GE; *dico quod Circulus, Centro* H, *radio* HA *discriptus, Parabolam interfecabit in punctis tribus vel uno* Z; *ad quæ ductæ rectæ* GZ *Curvæ Parabolicæ perpendiculariter insistunt.*

Ut autem tres sint hujusmodi intersectiones, oportet centrum circuli H *ita collocari, ut sit intra spatium Paraboloidibus (in Fig.* I.) *inclusum; hoc est ut* FH *minus quam* $\sqrt{\frac{8}{27}}$ VF³ *sive* FH² *minus quam cubus ex* $\frac{2}{3}$ UF: *atq; adeo* GE $=4$FH *minor erit quam* $4\sqrt{\frac{8}{27}}$ VF³ *sive* $4\sqrt{\frac{1}{27}}$ VE³, *hoc est quadratum ex* GE *minor erit quam* $\frac{16}{27}$ VE³. *Coincidunt itaq; hi limites cum Paraboloidibus duabus ejusdem generis cum iis quibus in Cubicis usi sumus, sed quarum Latus rectum duplo minor est;* viz. $\frac{27}{16}$ *Lateris recti Parabolæ, hoc est* $\frac{27}{8}$ *ipsius* AV: *ideoq; ea ipsa est linea Curva cujus evolutione generatur Parabola, sic demonstrante* Hugenio; *quamq; semper contingit linea* DF, *(Fig.* II.) *quæ Parabolæ perpendiculariter insistit in puncto* D. *Punctum autem* P, *sive in quo contingit recta* DF *Paraboloidem, centrum est Circuli, qui radio* DP *descriptus cum Parabola in puncto* D *coincidit, sive ejusdem Curvitatis est; ut per se satis constat.*

Descriptis itaq; hujusmodi Paraboloidibus VXP, VNΔ *(Fig.* II.) *utrinq; ab Axe; perspicuum est quod, nisi centrum Circuli constituatur intra hos limites, non possit ille pluribus quam duobus in punctis Parabolam intersecare: unde determinare licet quibus sub conditionibus Coefficientes terminorum intermediorum coercentur, in æquationibus Biquadraticis, ut habeantur quatuor radices. Ac prima fronte clarum est* p *majorem esse non posse quam* $\frac{1}{8}$bb *(scil. in formulis ubi habetur* $+$ p) *nec* q *quam* $\frac{1}{16}$b³. *Generaliter vero* $\frac{1}{16}b^3 \mp \frac{1}{4}pb \mp \frac{1}{2}q$, *id est distantia centri ab Axe* EG, *minor esse debet quam* EH $=4\sqrt{\frac{1}{27}}$ VE³. *hoc est (ob* VE $= \frac{3}{16}bb \mp \frac{1}{2}p$) *quam* $\frac{1}{4}bb \mp \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{16}bb + vel - p}$; *signis* $+$ *&* $-$ *in dubio relictis, ut secundum æquationis cujusvis naturam variari possint; quem-*

 admodum

admodum in Cúbicis superius ostensum est; ac nollem doctis tædium injicere, aut discentibus singula particulatim rimandi voluptatem ac exercitationem præripere.

Termini autem ultimi r *limitatio eadem facilitate inveniri nequit; id adeo, quia Problema sit Solidum, in Curvam Parabolæ demittere perpendicularem, quodq; non sine solutione æquationis Cubicæ resolvi possit. Itaq; prima loco deficiat secundus terminus, vel si adfuerit, tollatur, ut æquatio habeat formulam* z^4. *. $p z^2$. $q z$. $r = 0$. *Ac si fuerit* $-r$, *semper duabus vel quatuor Radicibus explicari potest; ut autem quatuor sint, oportet centrum circuli intra Paraboloides prædictas constitui, sive ut sit* $-p$, *ac* $q q$ *minus quam* $\frac{8}{27}p^3$ *sive cubo ex* $\frac{2}{3}p$. *Deinde habeantur radices æquationis hujus* y^3. *. $\frac{1}{2}p\,y$. $\frac{1}{4}q = 0$, *quantitatibus* p *&* q *iisdem signis annexis quibus in Biquadratica. Hæ autem Radices auxilio Tabulæ Sinuum satis expedite inveniuntur. Inventis autem tribus illis* y, *(quæ sunt ordinatim applicatæ ad Axem Parabolæ, de punctis ubi incidunt perpendicula in Curvam ejus. scil.* ZY *in Fig.* III.*)* $p y y - 3y^4$ *ex minore* y, *quantitatem maximam* r *designabit, si fuerit* $-r$; *qua si minor fuerit* r, *æquatio quatuor habebit radices, aliter duas. Ast si fuerit* $+r$, *oportebit eam minorem esse quam* $3y^4 - pyy$ *ex media* y, *nam si major sit, non nisi duas habere potest radices, saltem si minor sit* r *quam* $3y^4 - pyy$ *ex maxima* y. *Hac vero si major sit, nulla omnino radice vera explicabilis est æquatio. Hi vero iidem limites aliter designantur ex quantitate* q, *scil.* $\frac{1}{2}q\,y - y^4$ *in primo casu,* $y^4 - \frac{1}{2}q\,y$ *in secundo, ac* $y^4 + \frac{1}{2}q\,y$ *in tertio.*

Fieri autem potest ut duæ minores quantitates y *non longe distent ab invicem, unde evenit quod utraq; ex perpendicularibus major sit quam recta* GA, *scil. cum* $q q$ *majus sit quam* $\frac{4}{27}p^3$, *minus vero quam* $\frac{8}{27}p^3$; *cadente centro intra spatium Paraboloidibus utriusq; Figuræ* I *&* II *interjectum. Hoc in casu, si fuerit* $+r$, *non nisi duæ possunt esse radices, existente* $y^4 + \frac{1}{2}q\,y$ *ex maxima* y, *major quam* r; *aliter nulla. At si* $\frac{1}{2}q\,y - y^4$ *ex minima* y, *major fuerit quam* r *signo — notata,* r *vero major quam* $\frac{1}{2}q\,y - y^4$ *ex media* y, *tunc habentur quatuor radices*

dices; at duæ tantum ſi vel major priore vel minor poſteriore inventa ſit r.

Si vero in æquatione fuerit $+ p$, *vel ſi ſit* $- p$ & qq *majus fuerit quam* $\frac{8}{27}p^3$, *æquatio* $y^3 \cdot * \cdot \frac{1}{2}py \cdot \frac{1}{4}q$ *unica tantum explicatur radice* y; *hoc eſt una tantum perpendicularis de centro Circuli demitti poteſt: unde certo concluditur duas tantum radices haberi poſſe in æquatione data, quarum ſumma, ſi fuerit* $-r$, *cum quantitate* r *augetur; at ſi habeatur* $+ r$, *obtenta quantitate* y, *quantitas illa* r *minor eſſe debet quam* $y^4 + \frac{1}{2}qy$; *nam ſi ea major ſit, æquatio propoſita abſurda & impoſſibilis eſt.*

Longum & ſuperfluum eſſet omnes hujus cenſus æquationes percurrere, cum ex jam dictis attendenti ſatis evidens ſit, quæ Negativæ, quæ Affirmativæ ſint; atq; quod Radicum harum Limites ex quantitatibus inventis y *petantur. In exemplum vero, quod cuivis in cæteris imitari licet, proponantur indagandi limites ſive conditiones, ſub quibus in Æquatione Biquadratica* 4 *Radices Aſſirm. dari poſſint. Hoc autem ſit quoties centrum circuli* G *ponitur in ſpatio* UPK, (*Fig.* II.) *ac ſimul habetur* $+ r$ *ſive Circuli radius minor quam* GD: *Unde patet, æquationem de qua agitur hujus eſſe formulæ* $z - bz^3 + pz^2 - qz + r = 0$; p *vero majorem eſſem non poſſe quam* $\frac{3}{8}bb$, *nec* $\frac{3}{4}pb$ *hoc in caſu, quam* $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{2}q$; *deinde opus eſt ut* $\frac{1}{4}pb - \frac{2}{3}p$ *in* $\sqrt{\frac{1}{16}bb - \frac{1}{6}p}$ *major ſit quam* $\frac{1}{16}b^3 + \frac{1}{2}q - \frac{1}{4}pb$; *& ex his limitibus certo conſtabit centrum intra ſpatium* UPK *inveniri. Ut vero definiatur quantitas* r, *ſolvenda primum eſt Cubica* $y^3 \cdot * \cdot - \frac{3}{16}b^2 - \frac{1}{2}py = \frac{1}{32}b^3 + \frac{1}{4}q - \frac{1}{8}pb$; *& habebuntur puncta, in quæ perpendiculares de centro in Curvam Parabolæ cadunt.*

Inventis autem tribus valoribus hujus y, r *minor eſſe debet quam* $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}b^2yy + pyy$ *ex media* y, *major vero quam* $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bq - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}b^2yy + pyy$ *ex minima* y. *Hos vero limites ſi excedat* r, *non niſi duæ Radices haberi poſſunt. Deniq; ſi* $\frac{3}{256}b^4 + \frac{1}{4}bp - \frac{1}{16}bbp + 3y^4 - \frac{3}{8}bbyy + pyy$ *ex maxima* y, *minor fuerit quam* r, *æquatio propoſita impoſſibilis eſt.*

 Accidit

Accidit etiam ut quatuor ſint Affirmativæ, cum Centrum G *conſtituitur in ſpatiolo* V T S; *ducta ſcil.* R T S *perpendiculari in medium ſuppoſitæ lineæ* A D: *Hoc autem fit cum* p *major eſt quam* $\frac{5}{16}bb$, *ac* $\frac{1}{4}bb - \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{16}bb - \frac{1}{6}p}$ *major quam* $\frac{1}{8}pb - \frac{5}{128}bbb - \frac{1}{2}q$. *Quo in caſu ſemper duæ, aliquando tres ex Radicibus fiunt majores quam* $\frac{1}{4}b$.

Notandum vero hic limitem illum ex minima y *productum, aliquando negativum fieri, ſive minorem nihilo; quoties ſcil. maxima ex tribus perpendicularibus major eſt quam* G D. (*Fig.* II.) *Hoc ſi acciderit quantitas* + r *à limite præſcripto ex media* y, *in nihilum minui poteſt. Defectus vero limitis ex minima* y *monſtrat quanta poſſit eſſe* — r *in æquatione, ſi habeantur tres radices Affirmativæ ac una Negativa; quam ſi excedat, non niſi duæ, altera Affirmativa, altera Negativa, dari poſſunt. Hæc autem omnia demonſtrantur ex eo quod prædicti limites quantitatis* r, *ſint differentiæ Quadratorem lineæ* G D *& perpendicularium in Curvam Parabolæ.*

Ob perplexas vero cautiones, quas parit in æquationibus hiſce ſignorum diverſitas, præſtat ſemper ſecundum terminum tollere, ac deinde juxta præcepta jam tradita radicum numerum ac ſigna inquirere; præſertim ſi quantitates illæ y *non multum diſtent ab invicem. Ex quatuor autem hiſce radicibus Affirmativis, duæ ſemper ſunt minores quam* $\frac{1}{4}b$, *duæ vero majores; nempe ſi* D G *minor ſit quam* A G, *ſive* $\frac{1}{4}pb$ *quam* $\frac{3}{64}b^3 + q$. *Tres autem minores ſunt quam* $\frac{1}{4}b$, *quoties perpendicularis media, ſive ex media* y *inventa, major eſt quam* A G, *ſive* $\frac{1}{8}bby$ *major quam* $3y^3 - pyy$ *ex eadem media* y; *Quarta vero & maxima radix major eſt quam maxima* $y + \frac{1}{4}b$; *æquatuor autem differentiæ ipſius* b *& ſummæ cæterarum trium radicum, ideoq; minor eſt* b. *Sed jam* Manum de Tabula; *Fortaſſis illi qui naturam Parabolæ penitius perſpectam habent, majori compendio hæc omnia peragere valebunt; at ſi quantitates hæ omnes* b. p. q. *&* r, *abſq; reſolutione Cubicæ æquationis rite determinari poſſint, non ſine cauſa ambigitur; quæcunq; enim æquationibus planis hac in re fiunt, non veros limites, ſed approximationes tantum exhibent.*